

Cours 3 : Intervalle maximal d'existence

Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $(t_0, x_0) \in D$, $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$.

Par le théorème 2.2, il existe une solution $x = \phi_0(t)$ de (PC) sur un intervalle $[a_0, b_0]$ t.q. $t_0 \in (a_0, b_0)$ et $(a_0, \phi_0(a_0)), (b_0, \phi_0(b_0)) \in D$.

En appliquant à nouveau le thm 2.2 :

- il existe $a_1 < a_0$ et une solution $\phi_-(t)$ du problème

$$x' = f(t, x), \quad x(a_0) = \phi_0(a_0),$$

définie sur $[a_1, a_0]$;

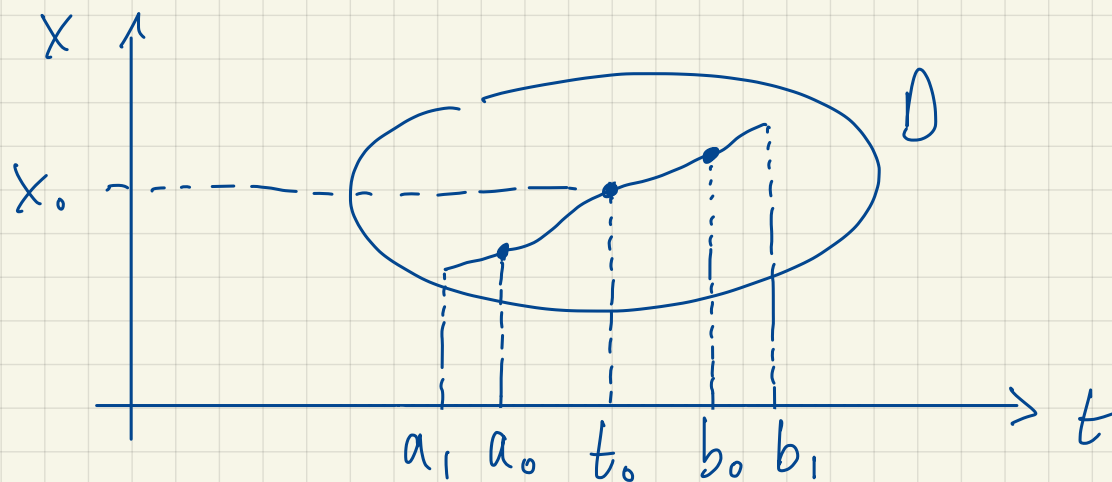
- il existe $b_1 > b_0$ et une solution $\phi_+(t)$ du problème

$x' = f(t, x)$, $x(b_0) = \phi_0(b_0)$,
 définie sur $[b_0, b_1]$.

Alors la fonction ϕ_1 définie par

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \phi_-(t), & t \in [a_1, a_0], \\ \phi_0(t), & t \in [a_0, b_0], \\ \phi_+(t), & t \in [b_0, b_1], \end{cases}$$

est une solution de (PC) sur $[a_1, b_1]$. CHECK =



$$\begin{aligned} \phi_1'(a_0^+) &= \lim_{t \rightarrow a_0^+} f(t, \phi_0(t)) \\ &= f(a_0, \phi(a_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow a_0^-} f(t, \phi_-(t)) \\ &= \phi_1'(a_0^-) \end{aligned}$$

De même,
 ϕ_1 est dérivable en b_0 .

Nous avons ainsi obtenu un premier prolongement ϕ_1 de la solution ϕ_0 , sur un intervalle $[a_1, b_1] \supsetneq [a_0, b_0]$.

On procède ensuite par itérations : soit ϕ_{m+1} un prolongement de ϕ_m , de $[a_m, b_m]$ à $[a_{m+1}, b_{m+1}]$. Alors (a_m) est strictement décroissante et (b_m) est strictement croissante. Posons

$$\alpha = \lim_{m \rightarrow \infty} a_m \in [-\infty, a_0) , \quad \beta = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m \in (b_0, \infty] ,$$

et soit ϕ le prolongement de ϕ_0 en une solution de (PC) sur l'intervalle (α, β) .

On a alors le résultat suivant.

Lemme 3.1: (a) Supposons que la suite $\{(a_n, \phi(a_n))\}$ admet un point d'accumulation $(\alpha, x_\alpha) \in D$. Alors $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \phi(t) = x_\alpha$. Dans ce cas, ϕ peut être prolongée jusqu'à $t = \alpha$.

(b) Supposons que $\{(b_n, \phi(b_n))\}$ admet un point d'acc. $(\beta, x_\beta) \in D$. Alors $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \phi(t) = x_\beta$. Dans ce cas, ϕ peut être prolongée jusqu'à $t = \beta$.

Preuve: Nous prouvons (a). La preuve de (b) est similaire.

Soit $\varepsilon > 0$ h. q.

$$U_\varepsilon := \{(t, x) ; |t - \alpha| \leq \varepsilon, |x - x_\alpha| \leq \varepsilon\} \subset D.$$

Posons $M_\varepsilon := \max \left\{ \max_{a_\varepsilon} |f|, 1 \right\} \geq 1$.

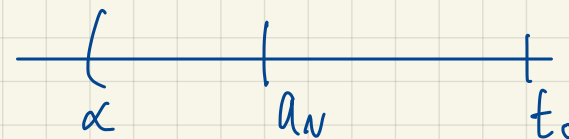
Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$(3.1) \quad \alpha < a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{2M_\varepsilon}, \quad |\phi(a_n) - X_\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On va montrer que

$$(3.2) \quad |\phi(t) - \phi(a_n)| < \overbrace{M_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2M_\varepsilon}}^{< M_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2M_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}} \quad \forall \alpha < t \leq a_n.$$

Il découle de (3.1) - (3.2) que



$$|\phi(t) - X_\alpha| \leq |\phi(t) - \phi(a_n)| + |\phi(a_n) - X_\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pour tout $t \in (\alpha, a_n)$. Donc $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \phi(t) = X_\alpha$.

Par la forme intégrale de l'équation, on déduit

que ϕ peut être prolongée[†] jusqu'à $t = \alpha$.

Premier de (3.2) : rappel : $\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$

$$|\phi(t) - \phi(a_n)| \leq \int_t^{a_n} \underbrace{|f(s, \phi(s))|}_{\leq M_\varepsilon} ds \stackrel{?}{\leq} M_\varepsilon (a_n - t) \leq M_\varepsilon (a_n - \alpha)$$

On a bien

$$\alpha < a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{2M_\varepsilon} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ d'où } |s - \alpha| < \varepsilon \quad \forall \alpha < s \leq a_n.$$

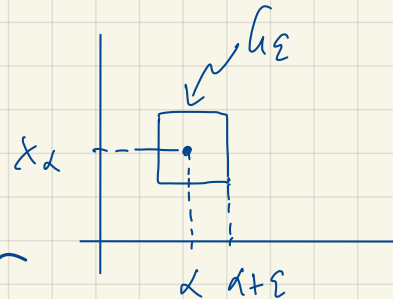
En revanche, on ne sait pas a priori que

$$|\phi(s) - x_\alpha| < \varepsilon \quad \forall \alpha < s \leq a_n, \text{ donc on ne peut}$$

conclure que $|f(s, \phi(s))| \leq M_\varepsilon$ sur cet intervalle

(on ne sait pas si $(s, \phi(s)) \in G_\varepsilon$).

† en une solution de (PC)



Il faut utiliser un argument de continuité.

On sait que (3.2) est vraie pour $t = a_n$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $t^* \in (\alpha, a_n)$
t.q.

$$|\phi(t) - \phi(a_n)| < M(\alpha - a_n) \quad \forall \quad t^* < t \leq a_n$$

et (par continuité de ϕ)

$$(3.3) \quad |\phi(t^*) - \phi(a_n)| = M(\alpha - a_n).$$

Alors, pour $t^* < t \leq a_n$, on a comme ci-dessus
que

$$|t - \alpha| < \varepsilon, \quad \text{et maintenant} \quad |\phi(t) - x_\alpha| < \varepsilon.$$

Ainsi, $\{(t, \phi(t)); \quad t^* < t \leq a_n\} \subset G_\varepsilon,$

d'où

$$|\phi(t^*) - \phi(a_n)| \leq \int_{t^*}^{a_n} |f(s, \phi(s))| ds$$

$$\leq M_\varepsilon (a_n - t^*) < M_\varepsilon (a_n - \alpha),$$

ce qui contredit (3.3). Ainsi, l'inégalité (3.2) est bien vraie pour tout $\alpha < t \leq a_n$. #
 et on conclut a posteriori que $(t, \phi(t)) \in G \quad \forall \alpha < t \leq a_n$

Le lemme 3.1 implique que, si $(\alpha, \phi(\alpha))$ ou $(\beta, \phi(\beta))$ est un point d'accumulation dans D de la courbe $\{(t, \phi(t)); \alpha < t < \beta\}$ alors la solution ϕ peut être prolongée sur un intervalle plus grand.

Déf: Un intervalle J est appelé intervalle maximal d'existence (i.m.e.) d'une solution ϕ de (PC) si ϕ est solution de (PC) sur J et il n'existe aucun intervalle $J_1 \not\supset J$ t.q. ϕ se prolonge en une solution de (PC) sur J_1 .

Rem: Comme D est ouvert, l'i.m.e. de toute solution ϕ de (PC) est nécessairement ouvert.

En effet, si $J = [\alpha, \beta)$ alors $(\alpha, \phi(\alpha)) \in D$ et ϕ peut être prolongée à gauche de $t = \alpha$ en considérant le problème $x' = f(t, x)$, $x(\alpha) = \phi(\alpha)$, ce qui contredit la maximalité de J .

Théorème 3.1: Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert,
 $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ et $(t_0, x_0) \in D$. Soit $x = \phi_0(t)$ une
solution de (PC). Alors ϕ_0 peut être prolongée
en une solution de (PC) sur un i.m.e. (α, β) ,
notée ϕ . De plus,

$$(3.4) \quad (t, \phi(t)) \longrightarrow \partial D \text{ lorsque } t \rightarrow \alpha^+ \text{ ou } t \rightarrow \beta^-.$$

Finalement, si f est localement lipschitzienne en x ,
le prolongement est unique.

Rem: (a) Si la solution de (PC) n'est pas unique,
 α, β dépendent de ϕ_0 .

(b) $(t, \phi(t)) \longrightarrow \partial D \quad (t \rightarrow \beta^-)$ signifie que

pour tout compact $K \subset D$, $(t, \phi(t)) \notin K$
pour t assez proche de β . (De même pour $t \rightarrow \alpha^+$.)

La preuve du thm 3.1 sera présentée au cours 4.
Nous établissons maintenant une conséquence importante
du théorème.

Corollaire 3.1: Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$,
 $D = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in D$, $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$.

Soit $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ l'intervalle d'existence
maximal d'une solution ϕ de (PC). Alors

(3.5) • soit $\alpha = a$, soit $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} |\phi(t)| = \infty$;

(3.6) • soit $\beta = b$, soit $\lim_{t \rightarrow \beta^-} |\phi(t)| = \infty$.

De plus, si f est bornée sur D , alors toute solution de (PC) existe sur (a, b) .

Preuve: (3.5)-(3.6) découlent directement de (3.4).

Supposons $M := \sup_D |f| < \infty$. S.p.d.g. supposons aussi $|a| < \infty$ et $|\beta| < \infty$ (les autres cas sont triviaux).

Pour tout $t \in [t_0, \beta)$, on a

$$|\phi(t)| \leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq |x_0| + M(t - t_0),$$

d'où $|\phi(t)| \leq |x_0| + M(\beta - t_0) \quad \forall t \in [t_0, \beta)$.

De la même manière, on obtient

$$|\phi(t)| \leq |x_0| + M(t_0 - \alpha) \quad \forall t \in [\alpha, t_0].$$

Ainsi, ϕ est bornée sur (α, β) et il découle de (3.5) - (3.6) que $\alpha = a$ et $\beta = b$. #

Exemple 3.1 : Le problème de Cauchy

$$x' = x^2, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

vu à l'exemple 1.2 illustre bien le corollaire 3.1.

Exemple 3.2 : Pour le problème

$$x' = t + \sin(x^2 - t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

On a $f(t, x) = t + \sin(x^2 - t)$ continue sur $\mathbb{R}^2$
avec $f_x(t, x) = 2x \cos(x^2 - t)$ continue sur $\mathbb{R}^2$
 $\hookrightarrow f$ loc. lip. en x sur $\mathbb{R}^2$, donc ce problème
possède une unique solution $\phi(t)$ pour toute
condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

Soit maintenant $T > 0$ t.q. $|t_0| < T$, et
posons $D_T = (-T, T) \times \mathbb{R}$. Alors f est bornée
sur D_T , donc par le cor. 3.1 $\phi(t)$ existe
sur $(-T, T)$. Comme $T > 0$ est arbitraire,
on déduit que ϕ existe sur $\mathbb{R}$.